

В. С. Михайлов

НЕЯВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПЛАНА ИСПЫТАНИЙ ТИПА $NB\tau$

V. S. Mikhaylov

IMPLICIT ESTIMATES FOR THE $NB\tau$ TEST PLAN

Аннотация. Целью настоящей работы является построение точечной оценки, заданной в неявном виде и близкой по своим свойствам к эффективной оценке, основанной на интегральном подходе, для испытаний, проводимых в соответствии с планом типа $NB\tau$. **Методы.** Для нахождения эффективной оценки использовались интегральные числовые характеристики точности оценки, а именно: суммарный квадрат смещения (уклонения) ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от всех возможных значений оцениваемой характеристики по различным значениям параметра пуассоновского з.р., характеризующего поток отказов совокупности испытуемых изделий. **Результаты и выводы.** Интегральный подход показал свою эффективность при выявлении свойств неявно заданных оценок. Неявно заданная точечная оценка СНДО $\hat{T}$ является эффективной среди предложенных оценок. В качестве точечной оценки вероятности безотказной работы всегда следует использовать традиционную, несмещенную и абсолютно эффективную точечную оценку $\hat{P} = R/N$, кроме безотказных испытаний. В этом случае следует использовать неявно заданную, смещенную точечную оценку ВБР $\hat{p}$.

Ключевые слова: биномиальный закон распределения, экспоненциальное распределение, план испытаний, точечная оценка.

Abstract. The purpose of this paper is to construct an estimate that is implicitly defined and close in its properties to an effective estimate based on an integral approach for tests conducted in accordance with a plan of type $NB\tau$. **Methods.** To find an effective estimate, we used the integral numerical characteristics of the accuracy of the estimate, namely, the total square of the displacement (deviation) of the expected realization of a certain valuation variant from all possible values of the estimated characteristic from the different values of the parameter of the Poisson crt characterizing the failure flow of the set of products under test. **Results and conclusions.** The integral approach has shown its effectiveness in identifying the properties of implicitly given estimates. An implicitly given point estimate of the mean time to failure T is effective among the proposed estimates. As a point estimate of the probability of failure-free operation, a traditional, unbiased and absolutely effective point estimate $\hat{P} = R/N$ should always be used, except for fail-safe tests. In this case, an implicit, biased point estimate of the probability of fail-safe operation $\hat{p}$ should be used.

Key words: binomial distribution law, exponential distribution, test plan, point estimation.

Введение

Будем рассматривать пуассоновский поток отказов [1], который возникает при проведении испытаний по плану типа $NB\tau$, где N – число испытуемых одностипных изделий; τ – наработка (одинаковая для каждого изделия); B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний не восстанавливается [1]. При этом будем считать, что наработка до отказа изделий подчиняется экспоненциальному закону распределения вероятностей (далее – з.р.) с параметром T_0 , где последний совпадает со средней наработкой до отказа (далее – СНДО). Тогда расчетное значение вероятности безотказной работы (далее – ВБР) одного изделия за заданное время τ будет определяться равенством

$$P_0(\tau) = e^{-\left(\frac{\tau}{T_0}\right)}. \quad (1)$$

Для плана типа $NB\tau$ достаточной статистикой является число наблюдаемых отказов (r) и суммарная наработка $S(R, \tau, t_i)$ [1, 2], R – случайное число отказов, t_i – моменты отказов, $i = 1, 2, \dots, R$, тогда для плана испытаний типа $NB\tau$ случайная величина R (далее – с.в.) имеет биномиальное рас-

пределение $p_N(k)$ [2, ф. 1.4.55] с параметрами N и $p, 0 < p < 1$, т.е. с.в. R , равная числу успехов в серии из N независимых опытов с вероятностью успеха $p = 1 - P_0(\tau)$, принимает целочисленные значения $0, 1, 2, \dots, N$ с вероятностями

$$p_N(k) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}. \quad (2)$$

Функция распределения $F_R(r, N, p)$ биномиальной с.в. R примет вид

$$F_R(r, N, p) = \sum_{k=0}^r p_N(k). \quad (3)$$

Функция распределения $F_R(r, N, p)$ вычисляется через неполную бет-функцию $I_p(x, y)$ по формуле [2, ф. 1.4.57]:

$$F_R(r, N, p) = 1 - I_p(r+1, N-r) = I_{1-p}(N-r, r+1). \quad (4)$$

Вероятность $p_N(k)$ вычисляется через неполную бета-функцию $I_p(x, y)$ по формуле [2, ф. 1.4.58]:

$$p_N(k) = I_p(k, N-k+1) - I_p(k+1, N-k). \quad (5)$$

Оценка $\hat{P}(R, N) = \frac{R}{N}$ является несмещенной и эффективной оценкой параметра p [2, пример 2.4.20]. Оценка $\hat{P}(R, N) = \frac{R}{N}$ также является и оценкой максимального правдоподобия [2, пример 2.10.7]

Цель работы

Целью настоящей работы является построение точечной оценки, заданной в неявном виде и близкой по своим свойствам к эффективной оценке, основанной на интегральном подходе [3–5], для испытаний, проводимых в соответствии с планом типа $NB\tau$.

Построение точечной оценки, заданной в неявном виде

Будем строить точечную оценку, заданную в неявном виде, используя приемы построения доверительных интервалов. Функция $F_R(r, N, p)$ убывает по p , и, следовательно, для построения одностороннего доверительного интервала $P(p_n < P_0)$ или $P(p_e > P_0)$ можно воспользоваться рекомендациями [2, ф. 2.15.37], а именно:

$$F_R(r, N, p_n) = 1 - \alpha = \gamma \quad \text{или} \quad F_R(r, N, p_e) = \alpha = 1 - \gamma, \quad (6)$$

где γ – доверительная вероятность, α – уровень доверия. Решение уравнений (формула (6)) позволяет найти доверительные границы (p_n и p_e). Доверительное оценивание является дополнительным инструментом, который позволяет оценивать вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного значения [1]. Вероятность уклонения точечной оценки параметра надежности от его истинного значения вместе с доверительными границами служит уровнем доверия к результатам испытаний.

Если полученный интервал (p_e и p_n) свести в точку, то доверительные границы этого интервала совпадут, т.е. p_e станет равной p_n . Что определит точечную оценку $\hat{p} = p_e = p_n$. Такой результат возможен в единственном случае, когда $\gamma = \alpha = 1 - \gamma = 0,5$, что определяет единственность оценки $\hat{p}$.

Воспользуемся формулой (6) и изучим свойства неявно заданной оценки $\hat{p}$, получаемой из уравнения

$$I_{1-\hat{p}}(N-r, r+1) = 0,5. \quad (7)$$

Построение критерия выбора эффективной оценки для ВБР

Построим критерий выбора эффективной оценки на множестве оценок $\hat{\theta}(R, N)$, основанном на суммарном квадрате относительных смещений математического ожидания оценок $E\hat{\theta}(R, N)$ (в нашем случае $\hat{P}(R, N) = \frac{R}{N}$ и $\hat{p}(R, N)$) от параметра p для всех возможных значений p, N . Поэтому в качестве критерия получения эффективной оценки строится функционал (далее – $L(\hat{\theta}(R, N))$) [3–5]:

$$L(\hat{\theta}(R, N)) = \frac{1}{N} \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^1 \{E\hat{\theta}(R, N) - p\}^2 dp. \quad (8)$$

В соответствии с формулой (3) математическое ожидание $E\hat{\theta}(R, N)$ имеет вид

$$E\hat{\theta}(R, N) = \sum_{k=0}^N p_N(k) \hat{\theta}(k, N).$$

С ростом N величина функционала $L(\hat{\theta})$ растет до бесконечности, поэтому сумму следует ограничивать объемом реальных испытаний. Для сложных изделий следует ограничиться $N = 10$.

Имея неявно заданную оценку ВБР за время, равное времени испытаний τ , $\bar{p} = 1 - \hat{p}$, легко получить оценку СНДО $\hat{T} = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))}$. Аналогично для оценки $\bar{P} = 1 - \hat{P}(R, N) = \frac{R}{N}$ оценка

$$\text{СНДО примет вид } \hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{P}(R, N))}.$$

Оценка СНДО для плана испытаний $NB \tau$ в соответствии с [6] имеет вид

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R, \tau, t_i, N)}{R + 1},$$

где t_i – моменты отказов, $i = 1, 2, \dots, R > 0$. Будем рассматривать простой случай и сократим число переменных оценки $\hat{T}$. Для этого будем предполагать, что разброс t_i происходит симметрично относительно $\tau/2$. Это выполнимо для высоко надежных изделий $\frac{\tau}{T_0} < 0,1$ [1]. Поэтому $S(R, \tau, N) = (N - R)\tau + R\tau/2$.

Оценка СНДО для плана испытаний $NB \tau$ в соответствии с [1] имеет вид $\hat{T}_2 = \frac{S(R, \tau, N)}{R}$. Определим оценку $\hat{T}_2$ при $R = 0$ величиной $\hat{T}_2 = S(R, \tau, N)$.

Соответственно оценки ВБР за время, равное времени испытаний, будут иметь вид

$$\bar{P}_1(R, \tau, N) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1}\right) \text{ и } \bar{P}_2(R, \tau, N) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_2}\right).$$

Или оценки вероятности отказа за время, равное времени испытаний, будут иметь вид

$$\hat{P}_1(R, \tau, N) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1}\right) \text{ и } \hat{P}_2(R, \tau, N) = 1 - \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_2}\right).$$

Чтобы иметь возможность определять свойства оценок $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$ и сравнивать их между собой и оценками $\hat{P}$ и $\hat{p}$, приведем функционал $L(\hat{\theta}(R, N))$ к виду $B(\hat{\theta}(R, N, \tau))$:

$$B(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \frac{1}{3} \sum_{\tau_j=1E+3}^{\tau_j=1E+5} \frac{1}{10} \sum_{N=10}^1 \int \{E\hat{\theta}(R, N, \tau_j) - p\}^2 \partial p. \quad (8')$$

При вычислении функционала $B(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ шаг суммирования по времени испытаний $\tau \in [1E+3; 1E+5]$ [5] производился по степеням с шагом равным единице, а именно: $1E+03$, $1E+04$, $1E+05$. Процесс вычисления функционалов $L(\hat{\theta}(R, N))$ от времени испытания τ не зависит.

Заметим, что при вычислениях варьирование шагом и диапазоном суммирования приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей – результат сравнения оценок не меняется.

В табл. 1 приведены результаты подстановки в функционалы $L(\hat{\theta}(R, N))$ и $B(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ в соответствии с формулами (8) и (8') следующих оценок ВБР: $\hat{p}$, $\hat{P}$, $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$.

Таблица 1

Результаты подстановки оценок ВБР в функционалы $L(\hat{\theta}(R, N))$ и $B(\hat{\theta}(R, N, \tau))$

$\hat{p}$	$\hat{P} = R / N$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$
Функционал $L(\hat{\theta}(R, \nu))$		Функционал $B(\hat{\theta}(R, \nu))$	
11,9E-05	8E-41	4,3E-05	4,3E-05

Из табл. 1 следует, что оценка $\hat{P} = R / N$ является не только эффективной оценкой параметра p в сравнении с предложенными, но и абсолютно эффективной. Такой результат вполне ожидаем, так как оценка $\hat{P}$ является несмещенной и ее эффективность доказана традиционными методами [2, пример 2.4.20].

Рассмотрим функционал (далее – $B(\hat{\theta})$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R, N)$ (в нашем случае $\hat{P}(R, N) = \frac{R}{N}$ и $\hat{p}(R, N)$) от параметра p для всех возможных значений p , N :

$$W(\hat{\theta}(R, N)) = \frac{1}{N} \sum_{N=10}^{\infty} \int E\{\hat{\theta}(R, N) - p\}^2 \partial p. \quad (9)$$

Чтобы иметь возможность определять свойства оценок $\hat{P}_1$ и $\hat{P}_2$ и сравнивать их между собой и оценками $\hat{P}$ и $\hat{p}$, приведем функционал $W(\hat{\theta}(R, N))$ к виду $Q(\hat{\theta}(R, N, \tau))$

$$Q(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \frac{1}{3} \sum_{\tau_j=1E+3}^{\tau_j=1E+5} \frac{1}{10} \sum_{N=10}^1 \int E\{\hat{\theta}(R, N, \tau_j) - p\}^2 \partial p. \quad (9')$$

Задачей функционалов $W(\hat{\theta}(R, N))$ и $Q(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ является определение степени разброса значений предложенных оценок.

В табл. 2 приведены результаты подстановки в функционалы $W(\hat{\theta}(R, N))$ и $Q(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ в соответствии с формулами (9) и (9') следующих оценок ВБР: $\hat{p}$, $\hat{P}$, $\hat{P}_1$, $\hat{P}_2$.

Из табл. 2 следует, что оценка $\hat{P} = R / N$ имеет минимальный разброс значений, что и следовало ожидать, так как оценка $\hat{P}$ является несмещенной и эффективной (см. табл. 1) [2, пример 2.4.20].

Таблица 2

Результаты подстановки оценок ВБР в функционалы $W(\hat{\theta}(R, N))$ и $Q(\hat{\theta}(R, N, \tau))$

$\hat{p}$	$\hat{P} = R / N$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$
Функционал $W(\hat{\theta}(R, \nu))$		Функционал $Q(\hat{\theta}(R, \nu))$	
2,3E-05	1E-07	4,3E-05	4,3E-05

Оценки $\hat{p}, \hat{P}_1, \hat{P}_2$ по своей эффективности являются равнозначными. Для безотказных испытаний следует применять оценки $\hat{p}$ и $\hat{P}_1$.

Построение критерия выбора эффективной оценки для СНДО

Рассмотрим функционал (далее – $V(\hat{\theta})$), основанный на суммировании квадратов относительных смещений математических ожиданий оценок $\hat{\theta}(R, N)$ (в нашем случае $\hat{T} = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))}$ и $\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{P}(R, N))}$) от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений t, N [3–5]:

$$V(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \frac{1}{3} \sum_{\tau_j=1E+3}^{\tau_j=1E+5} \frac{1}{10} \sum_{N=1}^{10} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 \{E\hat{\theta}(R, N, \tau_j) - t\}^2 \partial t. \quad (10)$$

Интегрирование ведется по всем возможным величинам параметра (СНДО) $t \in [0; \infty]$.

В табл. 3 приведены результаты подстановки в функционалы $V(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ в соответствии с формулой (10) следующих оценок СНДО: $\hat{T}, \hat{T}_0, \hat{T}_1, \hat{T}_2$.

Таблица 3

Результаты подстановки оценок ВБР в функционал $V(\hat{\theta}(R, N, \tau))$

$\hat{T}$	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$
6,31	6,44	1629	2376

Из табл. 3 следует, что неявно заданная точечная оценка СНДО $\hat{T}$ является эффективной в сравнении с предложенными оценками.

Рассмотрим функционал (далее – $H(\hat{\theta})$), основанный на суммировании математических ожиданий квадратов относительных уклонений оценок $\hat{\theta}(R, N)$ (в нашем случае $\hat{T} = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))}$ и $\hat{T}_0 = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{P}(R, N))}$) от параметра t экспоненциального з.р. (СНДО) для всех возможных значений t, N [3–5]:

$$H(\hat{\theta}(R, N, \tau)) = \frac{1}{3} \sum_{\tau_j=1E+3}^{\tau_j=1E+5} \frac{1}{10} \sum_{N=1}^{10} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^2 E\{\hat{\theta}(R, N) - t\}^2 \partial t. \quad (11)$$

Задачей функционалов $H(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ является определение степени разброса значений предложенных оценок.

В табл. 4 приведены результаты подстановки в функционал $H(\hat{\theta}(R, N, \tau))$ в соответствии с формулой (11) следующих оценок СНДО: $\hat{T}$, $\hat{T}_0$, $\hat{T}_1$, $\hat{T}_2$.

Таблица 4

Результаты подстановки оценок ВБР в функционал $H(\hat{\theta}(R, N, \tau))$

$\hat{T}$	$\hat{T}_0$	$\hat{T}_1$	$\hat{T}_2$
8,87	6,63	1630	2378

Из табл. 4 следует, что точечные оценки $\hat{T}$ и $\hat{T}_0$ конкурируют за возможность считаться эффективными (см. табл. 1). Однако оценка $\hat{T}_0$ в случае безотказных испытаний дает в результате бесконечность, что делает ее менее эффективной в сравнении с неявно заданной оценкой $\hat{T}$. Поэтому оценку $\hat{T}$ следует считать эффективной в сравнении с предложенными.

Пример 1. По результатам безотказных испытаний одного изделия в течение 1000 ч требуется сделать точечную оценку СНДО:

$$\hat{T}(r=0) = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))} = \frac{1000}{-\ln(1 - \hat{p}(0, 1))} = \frac{1000}{-\ln(1 - 0,5)} = 1442 \text{ ч};$$

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R, \tau, t_i, N)}{R+1} = \frac{1000}{1} = 1000 \text{ ч}.$$

Пример 2. По результатам испытаний одного изделия в течение 1000 ч в середине испытаний произошел отказ этого изделия. Требуется сделать точечную оценку СНДО:

$$\hat{T}(r=0) = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))} = \frac{1000}{-\ln(1 - \hat{p}(1, 1))} = \frac{1000}{-\ln(1 - 1)} = 0 \text{ ч};$$

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R, \tau, t_i, N)}{R+1} = \frac{500}{2} = 250 \text{ ч}.$$

Пример 3. По результатам испытаний двух изделий в течение 1000 ч в середине испытаний произошел отказ одного изделия. Требуется сделать точечную оценку СНДО:

$$\hat{T}(r=0) = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))} = \frac{1000}{-\ln(1 - \hat{p}(1, 2))} = \frac{1000}{-\ln(1 - 0,707)} = 815 \text{ ч};$$

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R, \tau, t_i, N)}{R+1} = \frac{1000 + 500}{2} = 750 \text{ ч}.$$

Пример 4. По результатам испытаний двух изделий в течение 1000 ч в середине испытаний произошли отказы всех изделий. Требуется сделать точечную оценку СНДО:

$$\hat{T}(r=0) = \frac{\tau}{-\ln(1 - \hat{p}(R, N))} = \frac{1000}{-\ln(1 - \hat{p}(2, 2))} = \frac{1000}{-\ln(1 - 1)} = 0 \text{ ч};$$

$$\hat{T}_1 = \frac{S(R, \tau, t_i, N)}{R+1} = \frac{500 + 500}{3} = 333 \text{ ч}.$$

Из примеров 1 и 3, на первый взгляд, следует парадоксальный вывод, что если в процессе испытаний произошли отказы ВСЕХ изделий, то надежность изделий оценивается как нулевая. Однако если производитель выставляет изделия на испытания, то он должен быть уверен в их надежности (безотказности в процессе испытаний) и исходе испытаний, иначе не следует начинать испытания на надежность.

Пример 5. По результатам безотказных испытаний одного изделия в течение 1000 ч требуется сделать точечную оценку ВБР за время, равное времени испытаний:

$$\bar{P}(1000 \text{ ч}) = 1 - \frac{R}{N} = 1 - 0 = 1;$$

$$\bar{p}(1000 \text{ ч}) = 1 - \hat{p}(R, N) = 1 - \hat{p}(0, 1) = 1 - 0,5 = 0,5.$$

Пример 6. По результатам безотказных испытаний 10 изделий в течение 1000 ч требуется сделать оценку ВБР за время, равное времени испытаний:

$$\bar{P}(1000 \text{ ч}) = 1 - \frac{R}{N} = 1 - 0 = 1;$$

$$\bar{p}(1000 \text{ ч}) = 1 - \hat{p}(R, N) = 1 - \hat{p}(0, 10) = 1 - 0,067 = 0,933;$$

$$\hat{P}_1(R, \tau, N) = \exp\left(-\frac{\tau}{\hat{T}_1}\right) = \exp\left(-\frac{1000}{10000}\right) = 0,905.$$

Из примеров 4 и 5 следует, что по результатам безотказных испытаний высоконадежных изделий следует выбирать оценку, чья величина располагается ближе всех к единице. Этому критерию соответствует неявно заданная оценка $\hat{p}$.

Выводы

1. Интегральный подход показал свою эффективность при выявлении свойств неявно заданных оценок.
2. Неявно заданная точечная оценка СНДО $\hat{T}$ является эффективной среди предложенных оценок (см. табл. 3).
3. В качестве точечной оценки ВБР за время, равное времени испытаний, всегда следует использовать традиционную несмещенную и абсолютно эффективную оценку $\hat{P} = R / N$, кроме безотказных испытаний. В этом случае следует использовать неявно заданную, смещенную точечную оценку ВБР $\hat{p}$.

Библиографический список

1. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
2. Шуленин, В. П. Математическая статистика. Часть 1. Параметрическая статистика / В. П. Шуленин. – Томск : Изд-во НТЛ, 2012. – 540 с.
3. Михайлов, В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность и контроль качества. – 1988. – № 9. – С. 6–11.
4. Михайлов, В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность. – 2016. – № 4. – С. 40–42.
5. Михайлов, В. С. Оценка вероятности безотказной работы по результатам испытаний, не давших отказы / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 2 (18). – С. 62–66. DOI: 10.21685/2307-4205-2017-2-8.
6. ГОСТ Р 50779.26-2007 Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения.

Михайлов Виктор Сергеевич

ведущий инженер,
Центральный научно-исследовательский институт
химии и механики им. Д. И. Менделеева
(115487, Россия, г. Москва, ул. Нагатинская, д. 16а)
E-mail: Mvs1956@list.ru

Mikhailov Viktor Sergeevich

lead engineer,
Central Research Institute of Chemistry
and Mechanics named after D. I. Mendeleev
(115487, 16a Nagatinskaya street, Moscow, Russia)

УДК 621.382.029.6

Михайлов, В. С.

Неявные оценки для плана испытаний типа *NB* / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 1 (21). – С. 64–71. DOI 10.21685/2307-4205-2018-1-8.